

2021

(March)

MATHEMATICS

(General)

Course : 301

[Group—A : Coordinate Geometry
Group—B : Analysis—I (Real Analysis)]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

GROUP—A

(Coordinate Geometry)

SECTION—I

(2-Dimension)

1. (a) যদি মূলবিন্দুটো (α, β) বিন্দুতে রূপান্তর করা হয়, তেন্তে $2x + 3y + 4 = 0$ রেখাডালৰ রূপান্তরিত সমীকরণটো লিখা।

If the origin is transferred to the point (α, β) , then write the transformed equation of the line $2x + 3y + 4 = 0$.

(b) মূলবিন্দুৰ সাপেক্ষে অক্ষৰেখা ঘূৰ্ণনৰ ক্ষেত্ৰত যদি

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

বাশিটো $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ বাশিলৈ ৰূপান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে অচৰকেইটা লিখা।

1

If by a rotation of the rectangular axes about the origin, the expression $ax^2 + 2hxy + by^2$ changes to $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$, then write the invariants of the transformation.

(c) $y = x$ সমীকৰণক পৰিৱৰ্তন কৰা যদিহে অক্ষৰেখাডাল 45° ঘূৰোৱা হয়।

3

Transform the equation $y = x$, if the axes are rotated through an angle 45° .

2. (a) শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

1

Choose the correct answer :

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এ দুডাল সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰে আৰু $h^2 - ab = 0$ হয়, তেন্তে সৰলৰেখা দুডাল

If $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents two straight lines and $h^2 - ab = 0$, then the two straight lines will be

- (i) বাস্তৱ হ'ব
real
- (ii) কাল্পনিক হ'ব
imaginary
- (iii) একেৰেখীয় হ'ব
coincident

(b) $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 16x + 26y + 21 = 0$ এ
নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the angle between the lines
represented by the equation
 $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 16x + 26y + 21 = 0$.

(c) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা
দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of the bisectors of
the angles between the lines represented
by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.

(d) দেখুওৱা যে, $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$
সমীকৰণে এযোৰ সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰে। 3

Show that the equation
 $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ represents
a pair of straight lines.

- (e) দেখুওৱা যে, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা দুডালৰ ওপৰত (x', y') বিন্দুৰ পৰা অংকন কৰা লম্ব দুডালৰ পূৰণফল হ'ব

$$\frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

5

Prove that the product of the perpendiculars from the point (x', y') on the lines represented by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is

$$\frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

অথবা /Or

দেখুওৱা যে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাব হৈ যোৱা আৰু $5x^2 - 7xy - 3y^2 = 0$ ৰ লম্বৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ব $3x^2 - 7xy - 5y^2 = 0$.

Show that the equation of the lines passing through the origin and perpendicular to $5x^2 - 7xy - 3y^2 = 0$ is $3x^2 - 7xy - 5y^2 = 0$.

3. (a) কি চৰ্ত সাপেক্ষে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত নিৰ্দেশ কৰিব, লিখা।

1

Write under what condition, the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a parabola.

(b) $lx + my + n = 0$ ৰেখাডাল

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শংকুচ্ছেদৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত লিখা।

1

Write the condition that the straight line $lx + my + n = 0$ is a tangent to the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

(c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$

সমীকৰণক আদৰ্শগত আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

4

Reduce the equation

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$$

to standard form.

অথবা / Or

$3x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ শংকুচ্ছেদৰ
কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

Determine the centre of the conic
 $3x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$.

(d) $11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$

সমীকৰণক লঘুকৃত কৰি বিহিত ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

4

Reduce the equation

$$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$$

to canonical form.

অথবা / Or

(1; 1) বিন্দুত

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x - 10y - 4 = 0$$

বক্ৰৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণবোৰ নিৰ্ধাৰণ কৰা।

Find the equations of the tangents and normal to the curve $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x - 10y - 4 = 0$ at (1, 1).

SECTION—II

(3-Dimension)

4. (a) আদৰ্শগত আকাৰত সমতলৰ সমীকৰণটো লিখা।

1

Write the equation of a plane in standard form.

(b) $7x + 4y + 14z = 28$ সমতলখনে স্থানাংক অক্ষবোৰৰ ধনাত্মক দিশত কৰা প্ৰতিচ্ছেদকৰ মান উলিওৱা।

1

Find the intercepts made by the plane $7x + 4y + 14z = 28$ in the positive direction of the coordinate axes.

- (c) $2x + 3y - 5z = 3$ আৰু $3x + 8y + 6z = 2$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণটো উলিওৱা। 2

Find the angle between the two planes $2x + 3y - 5z = 3$ and $3x + 8y + 6z = 2$.

- (d) $2x - 3y + z = 5$ সমতলৰ পৰা $(2, -3, 4)$ বিন্দুৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the distance of the point $(2, -3, 4)$ from the plane $2x - 3y + z = 5$.

- (e) দেখুওৱা যে

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+5}{3}$$

ৰেখাডাল $7x + 5y + z + 4 = 0$ সমতলখনৰ সমান্তৰাল। 4

Show that the line

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+5}{3}$$

is parallel to the plane $7x + 5y + z + 4 = 0$.

অথবা / Or

$(3, 5, 1)$, $(2, 3, 0)$ আৰু $(0, 6, 0)$ বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

Find the equation of the plane passing through the points $(3, 5, 1)$, $(2, 3, 0)$ and $(0, 6, 0)$.

5. (a) $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ আৰু $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$

বেখাদুডালৰ মাজৰ ক্ষুদ্রতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

4

Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2} \text{ and } \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$$

(b) মূলবিন্দুটোৰ পৰা $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ বেখাদালৰ

ওপৰত এডাল লম্ব টনা হ'ল। এই লম্বডালৰ সমীকৰণ আৰু ইয়াৰ পাদবিন্দুটোৰ স্থানাংক উলিওৱা।

4

A perpendicular is drawn from the origin to the line

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

Find the equation of the perpendicular and the coordinates of its foot.

অথবা /Or

kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, যাতে বেখাদ্বয়

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \text{ আৰু } \frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{k} = \frac{z-11}{4}$$

ছেদ কৰে।

Determine the value of k, so that the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ and

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{k} = \frac{z-11}{4} \text{ may intersect.}$$

GROUP—B

(Analysis—I)

6. (a) যদি $y = \sin ax$ হয়, তেন্তে $D^n \{\sin ax\} = ?$ 1
 If $y = \sin ax$, then $D^n \{\sin ax\} = ?$

(b) $y = e^{-x/2}$ বক্রৰ উপস্পর্শকৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা। 1
 Find the length of the subtangent of the curve $y = e^{-x/2}$.

(c) $r^{m+1} = a^m p$ বক্রৰ (p, r) বিন্দুত বক্রতা ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা। 2
 Find the radius of curvature at the point (p, r) of the curve $r^{m+1} = a^m p$.

(d) যদি $y = e^{ax} \sin bx$, তেন্তে দেখুওৱা যে 3
 $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$.
 If $y = e^{ax} \sin bx$, then show that
 $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$.

অথবা / Or

যদি $y = \tan^{-1} x$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

If $y = \tan^{-1} x$, then show that
 $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$.

(e) যি কোনো এটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

3

Evaluate any one :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^{1-x}} \right)$$

7. (a) ব'লৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2

State Rolle's theorem.

(b) যদি $f(x)$, অন্তৰাল $[a, b]$ ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু (a, b) ত $f'(x) \geq 0$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f(x)$, (a, b) ত বৰ্ধমান হ'ব।

3

If $f(x)$ is continuous in $[a, b]$ and $f'(x) \geq 0$ in (a, b) , then show that $f(x)$ is monotone increasing in (a, b) .

(c) লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

5

State and prove Lagrange's mean value theorem.

অথবা / Or

টেইলৰ উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

State and prove Taylor's theorem.

8. (a) যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, দেখুওরা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1

If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(b) যদি $u = \log r$ আৰু $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, তেন্তে
প্রমাণ কৰা যে

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

4

If $u = \log r$ and $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then
prove that

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

অথবা / Or

যদি $u = z \tan^{-1} \frac{y}{x}$, তেন্তে দেখুওরা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

If $u = z \tan^{-1} \frac{y}{x}$, then show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

9. (a) দেখুওৱা যে

Show that

$$\int_{a-c}^{b-c} f(x+c) dx = \int_a^b f(x) dx \quad 1$$

(b) যদি $f(x)$ এটা x ৰ অযুগ্ম ফলন হয়, তেন্তে

$$\int_{-a}^+ f(x) dx = ? \quad 1$$

If $f(x)$ is an odd function of x , then

$$\int_{-a}^+ f(x) dx = ?$$

(c) দেখুওৱা যে

Show that

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4} \quad 4$$

অথবা / Or

দেখুওৱা যে

Show that

$$\int_0^{\pi/2} (a \cos^2 x + b \sin^2 x) dx = \frac{1}{4} \pi (a + b)$$

(d) তলৰ যি কোনো এটাৰ লঘুকৰণৰ সূত্র নিৰ্ণয় কৰা : 4

Obtain reduction formula for any one of the following :

(i) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$

(ii) $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$
