

1 SEM TDC MTH G 1

2021

(Held in January/February, 2022)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[**A : Classical Algebra, B : Trigonometry,
C : Vector Calculus**]

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

A : CLASSICAL ALGEBRA

(Marks : 40)

1. (a) একদিষ্ট হ্রাসমান অনুক্রম বুলিলে কি বুজা? 1
What do you mean by monotonic decreasing sequence?
- (b) ষোগাত্মক শ্রেণীর এটা উদাহরণ দিয়া। 2
Give an example of a positive series.

- (c) দেখুওৱা যে অনুক্রম $\{f_n\}$ টি এটা ক'টি অনুক্রম য'ত

$$f_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad 3$$

Show that $\{f_n\}$, where $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$ is a Cauchy sequence.

- (d) দেখুওৱা যে অসীম শ্ৰেণী $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$ টো অভিসাৰী। 4

Show that the infinite series

$$\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$$

is convergent.

অথবা / Or

$\sum \frac{n!}{n^n}$ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

Test the convergence of the series

$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

2. (a) $\{S_n\} = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ অনুক্রমটোৰ প্ৰসাৰ লিখা। 1

Write down the range of the sequence

$$\{S_n\} = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$$

- (b) অভিসাৰী অনুক্রমৰ দুটি ধৰ্ম লিখা। 2

Write down two properties of convergent sequence.

(c) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 6×2=12

Test the convergence of any *two* of the following :

$$(i) 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

$$(ii) \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \dots$$

$$(iii) \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} + \dots$$

$$(iv) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

3. (a) ধৰি লওঁ

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \dots + P_n = 0; \quad P_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

বহুপদ ৰাশিটোৰ মূলসমূহৰ যোগফল কিমান? 1

Let

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \dots + P_n = 0; \quad P_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

What is the value of the sum of roots of the polynomial equation?

(b) সমাধান কৰা $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, যেতিয়া মূল দুটাৰ পাৰ্থক্য 3 হয়। 4

Solve $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, when difference of two roots is 3.

অথবা / Or

যদি $x^3 + px + q = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ হয়, তেন্তে $\alpha + \beta - \gamma, \beta + \gamma - \alpha$ আৰু $\gamma + \alpha - \beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো উলিওৱা।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px + q = 0$, then form the equation whose roots are $\alpha + \beta - \gamma, \beta + \gamma - \alpha$ and $\gamma + \alpha - \beta$.

(c) কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Solve by Cardan's method (any one) :

(i) $x^3 + 15x - 124 = 0$

(ii) $x^3 - 18x - 35 = 0$

(d) দেখুওৱা যে যদি বহুপদ $f(x)$ ক দ্বিপদ $(x-h)$ ৰে হৰণ কৰা হয়, তেন্তে ভাগশেষ হ'ব $f(h)$. 5

Show that if a polynomial $f(x)$ is divided by a binomial $(x-h)$, then the remainder is $f(h)$.

অথবা / Or

ডেকাৰ্টৰ নিয়ম অনুসৰি $x^4 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$ সমীকৰণৰ মূলৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

Find the nature of roots of the equation $x^4 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$ by Descartes' rule.

B : TRIGONOMETRY

(Marks : 25)

4. (a) $\sin \alpha$ ক α ব ঘাতত বিস্তৃত করোঁতে দ্বিতীয় পদটো কিমান? 1

What is the 2nd term in the expansion of $\sin \alpha$ in terms of α ?

- (b) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3$ ব মান নির্ণয় কৰা। 2

Determine the value of $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3$.

- (c) যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4} \quad 5$$

If n is a positive integer, then show that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

অথবা / Or

যদি $x = \cos \theta + i \sin \theta$ আৰু $1 + \sqrt{1-a^2} = na$,
প্রমাণ কৰা যে

$$1 + a \cos \theta = \frac{a}{2n} (1 + nx) \left(1 + \frac{n}{x} \right)$$

If $x = \cos \theta + i \sin \theta$ and $1 + \sqrt{1-a^2} = na$,
then prove that

$$1 + a \cos \theta = \frac{a}{2n} (1 + nx) \left(1 + \frac{n}{x} \right)$$

5. (a) এটা জটিল সংখ্যাৰ ঘাতাংকৰ কিমান সংখ্যক মান থাকিব, লিখা।

Write down the number of values of logarithm of a complex number.

- (b) দেখুওৱা যে

Show that

$$x^i = e^{-2n\pi} \{ \cos(\log x) + i \sin(\log x) \}$$

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা (Prove that)

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{\tan^{-1} y}{y} + \frac{\tan^{-1} z}{z} = 3 \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \dots \right)$$

যদি x, y, z এককৰ ঘনমূল হয়।

where x, y, z denote the cube roots of unity.

6. (a) $e^{\alpha+i\beta}$ ৰ বাস্তৱ অংশৰ মান লিখা।

Write down the real part of $e^{\alpha+i\beta}$.

- (b) প্ৰমাণ কৰা (Prove that)

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots$$

x জটিল হয় (x is complex).

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tanh}^2 x = 1$$

7. (a) যদি n অযুগ্ম হয়, তেন্তে $\sin n\theta$ ৰ বিকৃতিৰ শেষ পদটো লিখা। 1

If n is odd, then write down the last term in the expansion of $\sin n\theta$.

- (b) যদি z এটা জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে e^z ৰ কালারধি লিখা। 2

If z is a complex number, then write down the period of e^z .

- (c) তলৰ শ্ৰেণীৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Find the sum of the following series (any one) :

(i) $\sin \alpha + n \sin(\alpha + \beta) + \frac{n(n-1)}{2} \sin(\alpha + 2\beta) + \dots$

to n terms (পদ)

(ii) $\sin^3 \phi + \sin^3 2\phi + \sin^3 3\phi + \dots + \sin^3 n\phi$

(iii) $\cos \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \cos 2\theta +$

$$\cos^3 \theta \cos 3\theta + \dots$$

C : VECTOR CALCULUS

(Marks : 15)

8. (a) সদিশ বিন্দু ফলনৰ দিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিয়া।
Define directional derivative of vector point function.

(b) চলেনইডেল ভেক্টৰৰ সংজ্ঞা দিয়া।
Define solenoidal vector.

(c) প্রমাণ কৰা (Prove that)

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

(d) যদি $\vec{r} = (x^2y^3 - x^3)\hat{i} + (e^{xy})\hat{j} + (x^2 \sin y)\hat{k}$,
তেন্তে $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ উলিওৱা।

If $\vec{r} = (x^2y^3 - x^3)\hat{i} + (e^{xy})\hat{j} + (x^2 \sin y)\hat{k}$,
then find $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$.

(e) তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

4×2=8

Answer any two of the following :

(i) দেখুওৱা যে (Show that)

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

(ii) প্রমাণ কৰা যে (Prove that) $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

(iii) প্রমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\text{div} \{(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{b}\} = -2\vec{b} \cdot \vec{a}$$

★ ★ ★